

*А. Л. Письменский***ТЕОРИЯ ϕ^3 В РАЗМЕРНОСТИ $d = 3$ В РАМКАХ η -РАЗЛОЖЕНИЯ**

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»

им. В. И. Ульянова (Ленина),

Российская Федерация, 197376, Санкт-Петербург, ул. Профессора Попова, 5

В данной работе используется метод расчёта η -разложения в модели скалярного поля со взаимодействием ϕ^3 в трёхмерном евклидовом пространстве, основанный на уравнениях конформного бутстрапа. Как известно, существует техника ϵ -разложения, которая позволяет найти критический индекс в виде ряда по степеням ϵ отклонения размерности пространства от логарифмической. Однако для теории ϕ^3 логарифмическая размерность равна 6, а данный ряд по ϵ имеет очень малый радиус сходимости, и аналитически продолжить его в размерность $d = 3$ не представляется возможным. Для решения проблемы предлагается использовать η -разложение: в предположении, что критический индекс η — малая величина, строится разложение в ряд по степеням η и получается некоторое приближённое уравнение на критический индекс. Оказывается, что если рассматривать это уравнение как точное, то устойчивого решения на η нет. Но если использовать аппроксимацию Паде, то устойчивый корень уравнения появляется. Библиогр. 13 назв.

Ключевые слова: теория ϕ^3 , размерность 3, η -разложение.

Для цитирования: Письменский А. Л. Теория ϕ^3 в размерности $d = 3$ в рамках η -разложения // Вестник СПбГУ. Физика и химия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 1. С. 32–39.

<https://doi.org/10.21638/11701/spbu04.2018.104>

*A. L. Pismensky***THEORY ϕ^3 IN THE DIMENSION $d = 3$
IN FRAMES OF η -EXPANSION**

St. Petersburg Electrotechnical University “LETI”,

5, ul. Professora Popova, St. Petersburg, 197376, Russian Federation

The method of η -expansion calculation in the scalar field model with ϕ^3 interaction in a 3D euclidian space based on conformal bootstrap equations is used in the present paper. As we know, there is an ϵ -expansion technique that allows us to find the critical exponent in the form of a series in powers of ϵ , the deviation of the dimension of space from the logarithmic one. However, the logarithmic dimension of the theory ϕ^3 is 6, and the given series in ϵ have a very small radius of convergence, so that it is not possible to extend it analytically to the dimension $d = 3$. To solve the problem, we propose using the η -expansion: we construct the series in powers of critical exponent η supposing that it is a small value and obtain some approximate equation for η . If we consider this equation as precise, then it proves that there is no sustainable solution. But using the Padé approximant we receive a stable root of equation. Refs 13.

Keywords: theory ϕ^3 , dimension 3, η -expansion.

For citation: Pismensky A. L. Theory ϕ^3 in the dimension $d = 3$ in frames of η -expansion.

Vestnik SPbSU. Physics and Chemistry. 2018. Vol. 5 (63), iss. 1. P. 32–39.

<https://doi.org/10.21638/11701/spbu04.2018.104>

Введение. Одной из основных задач теории критического поведения является расчёт критических индексов. Весьма эффективными для её решения оказались уравнения ренормгруппы. По ним для критических индексов оказалось возможным построить ϵ -разложения, т. е. степенные ряды по отклонению ϵ размерности пространства от логарифмической. Для описания поведения системы в критической точке кроме уравнений

ренормгруппы использовались уравнения самосогласования, которые получаются в результате отбрасывания затравочных членов в скелетных уравнениях для функций Грина [1–6]. Эти уравнения применялись для построения $(1/n)$ -разложения критических индексов в $O(n)$ -симметричной модели $(\phi^2)^2$ и ϵ -разложения теории ϕ^3 . Основным преимуществом этого подхода является значительное уменьшение числа диаграмм Фейнмана, которые нужно вычислить для решения задачи. Уравнения самосогласования для полного пропагатора и полной тройной вершины являются основой метода конформного бутстрапа, который использовался для расчёта $(1/n^3)$ -поправки для индекса η в модели $(\phi^2)^2$ [6] и ϵ^3 - и ϵ^4 -поправок в модели ϕ^3 [7, 8]. В настоящей работе мы предлагаем использовать метод конформного бутстрапа для построения η -разложения в модели ϕ^3 .

Метод конформного бутстрапа для теории ϕ^3 . Мы исследуем простейшую квантовополевую модель ϕ^3 скалярного поля в евклидовом пространстве размерности $d = 3$ с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \phi \mathcal{K} \phi + \frac{\lambda}{3!} \phi^3.$$

Как известно, в обычной теории ϕ^3 логарифмической размерностью пространства является $d = 6$. Мы хотим видоизменить модель так, чтобы размерность $d = 3$ была логарифмической. Константа связи должна быть безразмерна: $\Delta_\lambda = 0$. Отсюда следует, что $3\Delta_\phi = 3$ и размерность поля $\Delta_\phi = 1$. Для размерности оператора \mathcal{K} получаем уравнение: $\Delta_{\mathcal{K}} + 2\Delta_\phi = 3$, откуда следует, что $\Delta_{\mathcal{K}} = 1$, т. е. затравочный пропагатор в импульсном представлении имеет вид

$$\Delta(k) \sim \frac{1}{k},$$

а в координатном представлении

$$\Delta(x) \sim \frac{1}{x^2}.$$

Предположим, что полный пропагатор имеет вид

$$D(x) = \frac{A}{x^{2\alpha}}, \quad \alpha = 1 + \frac{\eta}{2}.$$

Задача данной работы — построить η -разложение и получить уравнение на η .

Система уравнений конформного бутстрапа имеет вид

$$\begin{cases} V(\alpha, u; \omega)|_{\omega=0} = 1 \\ 2p(\alpha) = uS(\alpha) \frac{\partial V(\alpha, u; \omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega=0} \end{cases}, \quad (*)$$

где

$$p(\alpha) = \pi^{-d} H(\alpha - d/2, d/2 - \alpha), \quad S(\alpha) = \pi^{2d} \frac{H(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, d/2 + \alpha - \alpha)}{\Gamma(d/2)},$$

$$H(z) = \Gamma(z')/\Gamma(z), \quad z' = d/2 - z, \quad H(z_1, z_2, \dots) = H(z_1)H(z_2)\dots,$$

а функция $V(\alpha, u; \omega)$ определяется следующим образом:

$$\omega \text{ (triangle)} + \frac{1}{2} \omega \text{ (complex)} + \dots = V(\alpha, u; \omega) \text{ (self-energy)}.$$

Здесь кружочек — вершинная функция, а кружок со значком ω — регуляризованная вершинная функция:

$$\text{---}\bigcirc\text{---} = \alpha \begin{array}{c} \nearrow^a \\ \searrow_a \end{array} \begin{array}{c} \alpha \\ a \\ a \\ a \end{array} \quad \omega\text{---}\bigcirc\text{---} = \alpha + 2\omega \begin{array}{c} \nearrow^{a-\omega} \\ \searrow_{a-\omega} \end{array} \begin{array}{c} \alpha \\ a+\omega \\ a \end{array}.$$

Линия с индексом z

$$\text{---}\overset{z}{\longrightarrow}\text{---} = \frac{1}{(x_1 - x_2)^{2z}}.$$

Пропагаторная функция имеет вид:

$$D(x_1, x_2) = \frac{A}{(x_1 - x_2)^{2\alpha}},$$

Вершинная функция имеет вид:

$$\Gamma(x_1, x_2, x_3) = \frac{C}{(x_1 - x_2)^{2\alpha}(x_1 - x_3)^{2\alpha}(x_2 - x_3)^{2\alpha}},$$

индекс a определяется из условия уникальности всех вершин интегрирования:

$$2a + \alpha = d,$$

$u = C^2 A^3$ — ренорм-инвариантная комбинация амплитуд.

В левой части уравнения для V в первой диаграмме три вершины и три линии, т. е. она пропорциональна $C^3 A^3$. А в правой части функция V умножается на вершину, которая пропорциональна C . Таким образом, в главном приближении V пропорционально $C^2 A^3 = u$. Нетрудно убедиться, что вклад второй диаграммы в функцию V пропорционален u^2 и т. д.

Найдём сначала критический индекс η в однопетлевом приближении:

$$V(\alpha, u; \omega) \quad \omega\text{---}\bigcirc\text{---} = \omega\text{---}\bigcirc\text{---} \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{c} \alpha \\ a \\ a \end{array}.$$

Обозначим вклад данной диаграммы через γ_1 :

$$V = \gamma_1 u + \dots$$

Имеются три основных формулы расчёта безмассовых диаграмм:

1) петля:

$$\text{---}\begin{array}{c} \curvearrowright^{z_1} \\ \curvearrowleft_{z_2} \end{array}\text{---} = \text{---}\overset{z_1+z_2}{\longrightarrow}\text{---};$$

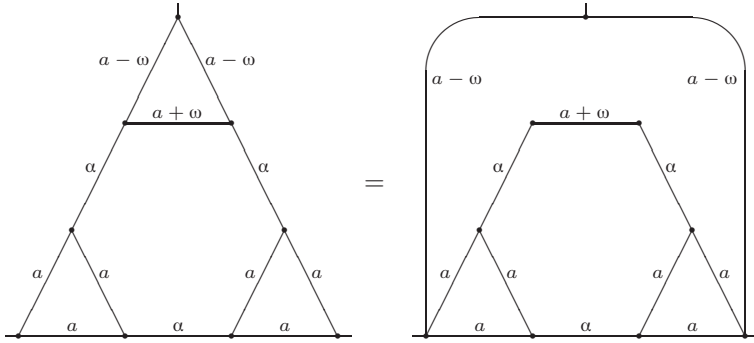
2) цепочка:

$$\text{---}\overset{z_1}{\longrightarrow}\text{---}\overset{z_2}{\longrightarrow}\text{---} = \pi^{d/2} H(z_1, z_2, d - z_1 - z_2) \text{---}\overset{z_1+z_2-d/2}{\longrightarrow}\text{---};$$

3) уникальная тройная вершина:

$$\begin{array}{c} \text{---} z_3 \\ | \\ z_1 \text{---} z_2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} = \pi^{d/2} H(z_1, z_2, z_3) \quad \begin{array}{c} z'_2 \quad z'_1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ z'_3 \\ \text{---} \end{array}, \quad z_1 + z_2 + z_3 = d.$$

В диаграмме γ_1 все вершины интегрирования уникальны, и путём преобразования инверсии она сводится к следующей диаграмме:



Пояснение: первый шаг — преобразование инверсии с базой в верхней внешней вершине, второй шаг — интегрирование двухвостой диаграммы (сведение её к линии), третий шаг — снова преобразование инверсии с базой в верхней вершине.

Вычисление γ_1 :

$$\begin{array}{c} \text{---} a + \omega \\ \diagdown \quad \diagup \\ \alpha \quad \alpha \\ \diagdown \quad \diagup \\ a \quad a \\ \text{---} \end{array} = \pi^d H(\alpha, \alpha, a + \omega, a + \alpha' - \omega) \quad \begin{array}{c} \alpha - a + \omega \\ \diagdown \quad \diagup \\ a \quad a \\ \text{---} \end{array}.$$

Обозначим вынесенный множитель через $\Psi(\alpha; \omega)$:

$$\Psi(\alpha; \omega) \equiv \pi^d H(\alpha, \alpha, a + \omega, a + \alpha' - \omega),$$

а оставшийся граф обозначим γ'_1 :

$$\gamma_1 = \Psi \gamma'_1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \gamma_1|_{\omega=0} &= \Psi|_{\omega=0} \gamma'_1|_{\omega=0}, \\ \frac{\partial \gamma_1}{\partial \omega} \Big|_{\omega=0} &= \frac{\partial \Psi}{\partial \omega} \Big|_{\omega=0} \gamma'_1|_{\omega=0} + \Psi|_{\omega=0} \frac{\partial \gamma'_1}{\partial \omega} \Big|_{\omega=0}. \end{aligned}$$

Функция Ψ содержит множитель $\Gamma(\alpha - a + \omega)$, который ведёт себя как

$$\frac{1}{3\eta/4 + \omega} + \dots,$$

а остальные множители регулярны при $\eta = 0$ и $\omega = 0$. Поэтому оказывается, что при дифференцировании по ω увеличивается на порядок сингулярность:

$$\Psi|_{\omega=0} \sim \frac{1}{\eta}; \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \omega} \right|_{\omega=0} \sim \frac{1}{\eta^2}.$$

Диаграмма γ'_1 имеет полюс второго порядка по η , и при дифференцировании по ω не увеличивается сингулярность. Чтобы найти однопетлевое приближение, нужно вычислить γ_1 в главном порядке по η . Для этого достаточно найти главный вклад $\gamma'_1|_{\omega=0}$ по η .

В диаграмме γ'_1 расходятся левый и правый треугольники (с индексами a на сторонах), и для вычисления главного сингулярного вклада достаточно концы верхней линии перенести к другим вершинам этих сингулярных треугольников:

$$\begin{aligned} \gamma'_1|_{\omega=0} &= \text{Diagram 1} \rightarrow \text{Diagram 2} = \\ &= \pi^6 H(a, a, \alpha)^2 H(a + \alpha', a + \alpha', 2\alpha - a, a'). \end{aligned}$$

Получается, что

$$\gamma'_1|_{\omega=0} = \frac{16\pi^6 4\pi^3}{9\pi\eta^2} + O\left(\frac{1}{\eta}\right),$$

и для вклада диаграммы γ_1 выражение следующее:

$$\gamma_1|_{\omega=0} = \frac{512\pi^{12}}{27\eta^3} + O\left(\frac{1}{\eta^2}\right),$$

$$\left. \frac{\partial \gamma_1}{\partial \omega} \right|_{\omega=0} = -\frac{2048\pi^{12}}{81\eta^4} + O\left(\frac{1}{\eta^3}\right).$$

Рассмотрим первое уравнение бутстрапа:

$$V|_{\omega=0} = 1.$$

В главном приближении $V = \gamma_1 u$, а $\gamma_1|_{\omega=0}$ в ведущем порядке по η пропорционально $1/\eta^3$. Следовательно, ренорм-инвариантная амплитуда u в главном приближении ведёт себя как η^3 . Поэтому мы ищем u в виде $u = u_3\eta^3 + \dots$. После решения первого уравнения бутстрапа получаем

$$u_3 = \frac{27}{512\pi^{12}},$$

т. е.

$$u = \frac{27}{512\pi^{12}} \eta^3 + O(\eta^4).$$

Рассмотрим второе уравнение бутстрапа:

$$2p(\alpha) = uS(\alpha) \left. \frac{\partial V(\alpha, u; \omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=0}.$$

Подставляя найденное u , получаем

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \omega} \right|_{\omega=0} = -\frac{4}{3\eta} + O(1).$$

Раскладывая левую и правую части второго уравнения бутстрапа до линейного по η вклада, мы получаем линейное уравнение на η :

$$-\frac{1}{\pi^4} + \frac{3}{2\pi^4} \eta = -\frac{3}{8\pi^4} \eta,$$

откуда находим $\eta = \frac{8}{15} = 0,5333$.

Теперь найдём η в двух- и трёхпетлевом приближениях. В двухпетлевом нам нужно учесть две диаграммы для V : они обе вычисляются с нужной точностью уже известными методами расчёта безмассовых диаграмм [3, 9–13]. На критический индекс получается квадратное уравнение:

$$-\frac{27 + 840\pi - 32\pi^3}{384\pi^5} \eta^2 + \frac{15}{8\pi^4} \eta - \frac{1}{\pi^4} = 0,$$

которое имеет только комплексные корни:

$$\eta_1 = -\frac{i(-720i\pi + \sqrt{41472\pi + 771840\pi^2 - 49152\pi^4})}{-54 - 1680\pi + 64\pi^3} \approx 0,6757 + 0,5140i,$$

$$\eta_2 = -\frac{i(720i\pi + \sqrt{41472\pi + 771840\pi^2 - 49152\pi^4})}{-54 - 1680\pi + 64\pi^3} \approx 0,6757 - 0,5140i.$$

Это означает, что на самом деле решений нет, так как функция Грина должна быть вещественна.

Рассмотрим трёхпетлевое приближение. Для этого потребуется вычислить следующие диаграммы:

$$V(\alpha, u; \omega) \stackrel{\omega}{\sim} \text{diagram} = \omega \gamma_1 + \frac{1}{2} \omega \gamma_2 + \omega \gamma_{31} + 3 \omega \gamma_{32}.$$

Все диаграммы, кроме последней, вычислены аналитически с требуемой точностью путём использования уже известных методов расчёта [3, 9–13]. Последнюю же диаграмму γ_{32} удалось сосчитать только численно. На критический индекс η получилось кубическое уравнение

$$-\frac{1}{\pi^4} + \frac{3}{2\pi^4} \eta + \frac{\pi^2 - 6}{12\pi^4} \eta^2 - \frac{1}{8\pi^2} \eta^3 = -\frac{3}{8\pi^4} \eta + \frac{9(24 + \pi^2)}{128\pi^4} \eta^2 +$$

$$+ \frac{3(9(1 + 6 \times 0,89724)\pi^4 + 16\pi^2(-19 + \ln 512) - 72(8 + 21\zeta_3))}{1024\pi^4} \eta^3,$$

где ζ_z — дзета-функция Римана.

Корни уравнения следующие:

$$\eta = -1,0262, \quad \eta = 0,2946 - 0,3464i, \quad \eta = 0,2946 + 0,3464i.$$

Комплексные корни не годятся для расчётов. Сравним вещественный корень $\eta = -1,0262$ с результатом однопетлевого расчёта: там было $\eta = \frac{8}{15} = 0,5333$.

Мы видим, что никакого устойчивого решения нет. Ошибка заключается в том, что мы рассматривали приближённое уравнение как точное.

Попробуем применить аппроксимацию Паде — перепишем второе уравнение системы (*) в виде

$$q(\eta) \equiv 2p(\alpha) - uS(\alpha) \frac{\partial V(\alpha, u; \omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega=0} = 0.$$

Функции $p(\alpha)$ и $S(\alpha)$ известны абсолютно точно, а величины u и $\frac{\partial V(\alpha, u; \omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega=0}$ — только приближённо (в виде разложения в ряд по η). Нужно найти решение уравнения $q(\eta) = 0$.

Результат следующий: число использованных членов разложения по η для u и $\frac{\partial V(\alpha, u; \omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega=0}$ оказывается неважным. Если для $q(\eta)$ использовать аппроксимации Паде (3; 0), (2; 1), (1; 2), (0; 3) в окрестности $\eta = -0,5$, то все они с хорошей точностью совпадают на интервале $\eta \in (-1; 0,5)$ и пересекают ось абсцисс при $\eta \approx 0,35$. Таким образом, можно предположить, что $\eta \approx 0,35$ является решением задачи.

Заключение. Преимуществом метода конформного бутстрапа по сравнению с методом ренормгруппы является значительное сокращение числа диаграмм Фейнмана. Он был успешно применён для расчёта четырёхпетлевой поправки критического индекса η теории ϕ^3 в рамках ϵ -разложения [8].

Однако этот метод имеет недостатки: он пригоден только для моделей с гарантийной конформной инвариантностью в критическом режиме и только с тройными затравочными вершинами. Хотя метод конформного бутстрапа был использован для построения $1/n$ -разложения теории ϕ^4 [6], применить его для ϵ -разложения не удалось.

В дальнейшем планируется найти критический индекс η теории ϕ^3 в произвольной размерности, не предполагая его малым.

Хотелось бы усовершенствовать метод конформного бутстрапа и использовать его для теории ϕ^3 непосредственно в логарифмической размерности ($d = 6$), где конформная инвариантность заведомо нарушается. Планируется также применить этот метод к теории Янга — Миллса и извлечь инфракрасную асимптотику пропагатора, где экспериментально наблюдается конфайнмент (проблема невылетаия кварков).

Благодарности. Автор статьи благодарит Ю. М. Письмака за постановку задачи и полезные советы при анализе трудностей в решении. Автор также выражает благодарность М. В. Компанийцу за помощь в расчёте диаграмм Фейнмана.

Литература

1. Mack G. D-independent representation of conformal field theories in D dimensions via transformation to auxiliary dual resonance models. Scalar amplitudes // arXiv: 0907.2407v1 [hep-th].
2. Mack G. D-dimensional conformal field theories with anomalous dimensions as dual resonance models // Bulg. J. Phys. 2009. Vol. 36. P. 214–226.
3. Васильев А. Н. Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике. СПб.: Изд-во ПИЯФ, 1998.
4. Vasiliev A. N., Pis'mak Y. M., Khonkonen Y. R. Simple method of calculating the critical indices in the $1/n$ expansion // Theor. Math. Phys. 1981. Vol. 46, iss. 2. P. 104–113.

5. Vasiliev A. N., Pis'mak Y. M., Khonkonen Y. R. $1/n$ Expansion: Calculation of the exponents η and ν in the order $1/n^2$ for arbitrary number of dimensions // *Theor. Math. Phys.* 1981. Vol. 47, iss. 3. P. 465–475.
6. Vasiliev A. N., Pis'mak Y. M., Khonkonen Y. R. $1/n$ Expansion: Calculation of the exponent ν in the order $1/n^3$ by the conformal bootstrap method // *Theor. Math. Phys.* 1982. Vol. 50, iss. 2. P. 127–134.
7. Pismenskii A. L. Calculation of the critical index η for the ϕ^3 theory by the conformal bootstrap method // *Theor. Math. Phys.* 2015. Vol. 185, iss. 1. P. 1516–1521.
8. Pismenskii A. L. Calculation of critical index η of the ϕ^3 -theory in 4-loop approximation by the conformal bootstrap technique // *Int. J. Mod. Phys. (A)*. 2015. Vol. 30. 1550138.
9. Huber T., Maître D. Expanding hypergeometric functions about half-integer parameters // *Comp. Phys. Commun.* 2008. Vol. 178. P. 755–776.
10. Kotikov A. V. The Gegenbauer polynomial technique: the evaluation of complicated Feynman integrals // *arXiv: hep-ph/0102177v1*.
11. Kazakov D. I. Many-loop calculations: The uniqueness method and functional equations // *Theor. Math. Phys.* 1985. Vol. 62, iss. 1. P. 84–89.
12. Baikov P. A., Chetyrkin K. G. Four loop massless propagators: an algebraic evaluation of all master integrals // *Nucl. Phys. (B)*. 2010. Vol. 837. P. 186–220.
13. Chetyrkin K. G., Tkachov F. V. Integration by parts: The algorithm to calculate β -functions in 4 loops // *Nucl. Phys. (B)*. 1981. Vol. 192. P. 159–204.

References

1. Mack G. D-independent representation of conformal field theories in D dimensions via transformation to auxiliary dual resonance models. Scalar amplitudes. *arXiv: 0907.2407v1* [hep-th].
2. Mack G. D-dimensional conformal field theories with anomalous dimensions as dual resonance models. *Bulg. J. Phys.*, 2009, vol. 36, pp. 214–226.
3. Vasiliev A. N. *The field theoretic renormalization group in critical behavior theory and stochastic dynamics*. Boca Raton, Chapman & Hall/CRC, 2004.
4. Vasiliev A. N., Pis'mak Y. M., Khonkonen Y. R. Simple method of calculating the critical indices in the $1/n$ expansion. *Theor. Math. Phys.*, 1981, vol. 46, iss. 2, pp. 104–113.
5. Vasiliev A. N., Pis'mak Y. M., Khonkonen Y. R. $1/n$ Expansion: Calculation of the exponents η and ν in the order $1/n^2$ for arbitrary number of dimensions. *Theor. Math. Phys.*, 1981, vol. 47, iss. 3, pp. 465–475.
6. Vasiliev A. N., Pis'mak Y. M., Khonkonen Y. R. $1/n$ Expansion: Calculation of the exponent ν in the order $1/n^3$ by the conformal bootstrap method. *Theor. Math. Phys.*, 1982, vol. 50, iss. 2, pp. 127–134.
7. Pismenskii A. L. Calculation of the critical index η for the ϕ^3 theory by the conformal bootstrap method. *Theor. Math. Phys.*, 2015, vol. 185, iss. 1, pp. 1516–1521.
8. Pismenskii A. L. Calculation of critical index η of the ϕ^3 -theory in 4-loop approximation by the conformal bootstrap technique. *Int. J. Mod. Phys. (A)*, 2015, vol. 30, 1550138.
9. Huber T., Maître D. Expanding hypergeometric functions about half-integer parameters. *Comp. Phys. Commun.*, 2008, vol. 178, pp. 755–776.
10. Kotikov A. V. The Gegenbauer polynomial technique: the evaluation of complicated Feynman integrals. *arXiv: hep-ph/0102177v1*.
11. Kazakov D. I. Many-loop calculations: The uniqueness method and functional equations. *Theor. Math. Phys.*, 1985, vol. 62, iss. 1, pp. 84–89.
12. Baikov P. A., Chetyrkin K. G. Four loop massless propagators: an algebraic evaluation of all master integrals. *Nucl. Phys. (B)*, 2010, vol. 837, pp. 186–220.
13. Chetyrkin K. G., Tkachov F. V. Integration by parts: The algorithm to calculate β -functions in 4 loops. *Nucl. Phys. (B)*, 1981, vol. 192, pp. 159–204.

Статья поступила в редакцию 21 декабря 2017 г.

Контактная информация

Письменский Артём Леонидович — кандидат физико-математических наук;
e-mail: artem5085@mail.ru

Pismensky Artem Leonidovich — PhD; e-mail: artem5085@mail.ru